

Chapitre 2 – Objectif Bac – Résolution détaillée

1. a. Sens de variation de g

La fonction g est une fonction polynôme dérivable sur $[0 ; 1]$.

Le sens de variation de g est donné par le signe de sa dérivée.

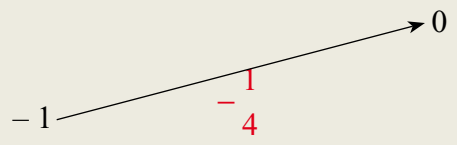
On a $g(x) = u(x)^3$ avec $u(x) = x - 1$.

Donc $g'(x) = 3u'(x)u(x)^2 = 3 \times 1 \times (x - 1)^2 = 3(x - 1)^2$.

On en déduit que $g'(x) \geq 0$ sur $[0 ; 1]$, ne s'annulant qu'en 1, donc g est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

Équation $g(x) = -\frac{1}{4}$

On peut s'aider du tableau de variations de la fonction g en plaçant $-\frac{1}{4}$:

x	0	?	1
Variations de g			

Justifions que l'équation $g(x) = -\frac{1}{4}$ a une unique solution dans $[0 ; 1]$ en appliquant la propriété 3 page 40 :

- La fonction g est continue car dérivable sur $[0 ; 1]$.
- De plus g est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.
- Comme $g(0) = -1$ et $g(1) = 0$, on a $-\frac{1}{4} \in [g(0) ; g(1)]$.

Par suite, l'équation $g(x) = -\frac{1}{4}$ a une unique solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

b. On utilise la méthode de balayage en obtenant un tableau de valeurs de g avec un pas de 0,1 :

X	Y1	
0	-1	
.1	-.729	
.2	-.512	
.3	-.343	
.4	-.216	
.5	-.125	
.6	-.064	

On constate que $g(0,3) < -\frac{1}{4} < g(0,4)$.

On déduit, du fait de la stricte croissance de g , que $0,3 < \alpha < 0,4$.

2. a. La fonction f est une fonction polynôme dérivable sur $[0 ; 1]$.

De $f(x) = u(x)^4$ avec $u(x) = x - 1$, on déduit que sur $[0 ; 1]$:

$$f'(x) = 4u'(x)u(x)^3 = 4(x-1)^3,$$

ou encore $f'(a) = 4(a-1)^3$ pour tout a de $[0 ; 1]$.

b. $f'(a) = -1 \Leftrightarrow 4(a-1)^3 = -1 \Leftrightarrow 4g(a) = -1 \Leftrightarrow g(a) = -\frac{1}{4}.$

Par la question 1.a, on en déduit que l'équation $f'(a) = -1$ a pour unique solution α dans $[0 ; 1]$.

c. Le coefficient directeur de la droite (PR) est $\frac{y_R - y_P}{x_R - x_P} = -1.$

Pour tout a de $[0 ; 1]$, la tangente à la courbe \mathcal{C} en son point d'abscisse a a pour coefficient directeur $f'(a).$

Cette tangente est parallèle à la droite (PR) si et seulement si les coefficients directeurs de ces deux droites sont égaux c'est-à-dire $f'(a) = -1.$

La courbe \mathcal{C} a donc une unique tangente parallèle à (PR) : il s'agit de sa tangente en son point d'abscisse $\alpha.$

2. Comme α est solution de l'équation $g(x) = -\frac{1}{4}$, on a $g(\alpha) = -\frac{1}{4}$ c'est-à-dire $(\alpha-1)^3 = -\frac{1}{4}.$

Alors $f(a) = (\alpha-1)^4 = (\alpha-1)^3(\alpha-1) = -\frac{1}{4}(\alpha-1).$

Notons k la fonction définie sur \mathbb{R} par $k(x) = -\frac{1}{4}(x-1).$

Dire que $f(\alpha) = k(\alpha)$ signifie que α est l'abscisse d'un point d'intersection des courbes représentant les fonctions f et $k.$

Autrement dit α est l'abscisse d'un point d'intersection de \mathcal{C} et de la droite d d'équation : $y = -\frac{1}{4}(x-1).$

On construit donc la droite d qui coupe \mathcal{C} en un seul point $A(\alpha; f(\alpha))$ puis on place l'abscisse α de $A.$

On construit ensuite la tangente T à \mathcal{C} en A comme la parallèle à (PR) passant par $A.$

